Μάθημα	:	**Θεμελιώδεις Έννοιες των Μαθηματικών** (Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων)
Ακαδημαϊκό Έτος	:	**2017 - 2018**
Περιεχόμενο	:	**Πρώτο Φυλλάδιο Ασκήσεων του καθ. Ανδρέα Τόλια**
Ημερομηνία Στοιχειοθεσίας	:	2019/08/24 (ώρα 14:35:48)
Δημιουργήθηκε από	:	Κυριάκος Γ. Μαυρίδης
Ηλεκτρονικό Ταχυδρομείο	:	• kyriakos.g.mavridis@gmail.com • kmavridi@uoi.gr
Ιστοσελίδα	:	http://users.uoi.gr/kmavridi/
Άδεια Χρήσης	:	*"Creative Commons Αναφορά Δημιουργού 4.0 Διεθνές"* (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

1. Να δείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες.

- $p \vee (\sim p)$
  Λύση.
  Ταυτολογία σημαίνει ότι στον πίνακα αληθείας που θα φτιάξουμε, στην τελευταία στήλη πρέπει να υπάρχει παντού το "αληθές". Έχουμε μόνον μια λογική πρόταση, την p, συνεπώς ο πίνακας θα έχει

  $$2^{\text{πλήθος λογικών προτάσεων}} = 2^1 = 2$$

  γραμμές. Χτίζουμε, λοιπόν, τη σχέση κομμάτι - κομμάτι

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α

- $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
  Λύση.
  Στην τελευταία στήλη πρέπει να υπάρχει παντού το "αληθές". Έχουμε δυο λογικές προτάσεις, τις p, q, συνεπώς ο πίνακας θα έχει

  $$2^{\text{πλήθος λογικών προτάσεων}} = 2^2 = 4$$

  γραμμές. Χτίζουμε, λοιπόν, τη σχέση κομμάτι - κομμάτι

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$(\sim p)$	$(\sim q)$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α

2. Να δείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες.

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge (\sim q))$
  Λύση.
  Στην τελευταία στήλη πρέπει να υπάρχει παντού το "αληθές". Έχουμε δυο λογικές προτάσεις, τις p, q, συνεπώς ο πίνακας θα έχει

  $$2^{\text{πλήθος λογικών προτάσεων}} = 2^2 = 4$$

  γραμμές. Χτίζουμε, λοιπόν, τη σχέση κομμάτι - κομμάτι

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim (p \wedge (\sim q))$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge (\sim q))$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

- $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  Λύση.
  Στην τελευταία στήλη πρέπει να υπάρχει παντού το "αληθές". Έχουμε τρεις λογικές προτάσεις, τις p, q, r, συνεπώς ο πίνακας θα έχει

  $$2^{\text{πλήθος λογικών προτάσεων}} = 2^3 = 8$$

  γραμμές. Χτίζουμε, λοιπόν, τη σχέση κομμάτι - κομμάτι

p	q	r	$p \wedge r$	$p \wedge (p \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

3. Αν γνωρίζουμε ότι η πρόταση $(p \Rightarrow q) \wedge [q \Rightarrow (\sim p)]$ είναι αληθής, τι συμπεραίνετε για τις προτάσεις p και q;
Λύση.
Αρχικά, κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας της πρότασης που μας έχει δοθεί.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$q \Rightarrow (\sim p)$	$(p \Rightarrow q) \wedge [q \Rightarrow (\sim p)]$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Η υπόθεση μας λέει ότι η πρόταση της τελευταίας στήλης είναι υποχρεωτικά αληθής. Βλέπουμε ότι στην στήλη αυτή μόνον οι δυο τελευταίες γραμμές έχουν το γράμμα "Α". Κοιτάμε σε κάθε μια από αυτές τις γραμμές τι είναι οι προτάσεις p και q. Στην προτελευταία γραμμή η πρόταση p είναι ψευδής και η πρόταση q αληθής. Στην τελευταία γραμμή η πρόταση p είναι ψευδής και η πρόταση q ψευδής. Συνεπώς, γνωρίζουμε σίγουρα ότι υποχρεωτικά θα ισχύει ισχύει ή μια περίπτωση ή η άλλη. Άρα η απάντηση είναι ότι είτε η πρόταση p είναι ψευδής και η πρόταση q αληθής, είτε η πρόταση p είναι ψευδής και η πρόταση q ψευδής. Αυτή είναι και η απάντηση στο ερώτημα της εκφώνησης.

4. Εξετάστε αν η πρόταση $(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow p)$ είναι ταυτολογία.
Λύση.
Για να είναι ταυτολογία, πρέπει ο πίνακας αληθείας που θα κατασκευάσουμε, στην τελευταία στήλη (που έχει ολόκληρη την πρόταση της εκφώνησης), να έχει μόνον "Α". Κατασκευάζουμε τον πίνακα και έχουμε στο μυαλό μας ότι αν γράψουμε "Ψ" έστω και σε μια γραμμή της τελευταίας στήλης, τότε σίγουρα δεν μπορεί να είναι ταυτολογία, οπότε εκεί σταματάμε και δεν χρειάζεται να γράψουμε τίποτε άλλο στον πίνακα. Η απάντηση μας σε αυτήν την περίπτωση θα είναι ότι η πρόταση δεν είναι ταυτολογία. Αν όμως σε όλες τις γραμμές της τελευταίας στήλης υπάρχει το "Α" τότε η πρόταση είναι ταυτολογία.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow p)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Παρατηρούμε ότι στην τελευταία στήλη υπάρχει παντού το "Α", οπότε η πρόταση είναι ταυτολογία.

5. Αν γνωρίζουμε ότι η πρόταση $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee [\sim (q \Leftrightarrow p)]$ είναι ψευδής, να βρείτε ποιες από τις προτάσεις p, q, r είναι αληθείς και ποιες ψευδείς.
Λύση.
Αυτή η άσκηση είναι της ίδιας λογικής με την Άσκηση 3. Αρχικά κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow p)$	$\sim (q \Leftrightarrow p)$	$[p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee [\sim (q \Leftrightarrow p)]$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α

Η υπόθεση μας λέει ότι η πρόταση της τελευταίας στήλης είναι ψευδής. Βλέπουμε ότι στην στήλη αυτή μόνον η δεύτερη γραμμή έχει το γράμμα "Ψ". Κοιτάμε σε αυτήν την γραμμή τι είναι οι προτάσεις p, q, r. Η πρόταση p είναι αληθής, η πρόταση q είναι αληθής και η πρόταση r είναι ψευδής. Αυτή και είναι η απάντηση μας σε αυτήν την άσκηση. Σημειώνουμε ότι, γενικά, θα μπορούσαν να προκύπτουν δυο ή περισσότερες γραμμές, οι οποίες έχουν στην τελευταία στήλη το "Ψ". Τότε θα λέγαμε ότι υπάρχουν δυο ή περισσότερα ενδεχόμενα, αντίστοιχα, καθένα από τα οποία θα αντιστοιχούσε σε μια από αυτές τις γραμμές.

6. Αν p, q, r είναι τρεις λογικές προτάσεις ώστε οι $p \Rightarrow (q \wedge r)$ και $q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$ να είναι αληθείς, να δειχθεί ότι η $\sim (p \vee q)$ είναι αληθής. Ισχύει το αντίστροφο;
Λύση.
Αυτή η άσκηση είναι της ίδιας λογικής με την Άσκηση 5. Αρχικά κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας. Ο πίνακας αυτός πρέπει να περιέχει όλες τις προτάσεις που εμφανίζονται στην εκφώνηση, δηλαδή τις

- $p \Rightarrow (q \wedge r)$
- $q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$
- $\sim (p \vee q)$

Τις χτίζουμε λοιπόν.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$\sim r$	$p \wedge (\sim r)$	$q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$
Α	Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α

Η υπόθεση μας λέει ότι οι $p \Rightarrow (q \wedge r)$ και $q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$ είναι αληθείς. Παρατηρούμε ότι η $p \Rightarrow (q \wedge r)$ είναι αληθής στις γραμμές $1, 5, 6, 7, 8$ ενώ η $q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$ είναι αληθής στις γραμμές $2, 3, 4, 7, 8$. Η υπόθεση μας λέει ότι αυτές οι δυο είναι ταυτόχρονα αληθείς, άρα αναγκαστικά περιοριζόμαστε στις γραμμές $7, 8$. Και στις δυο αυτές γραμμές η πρόταση $\sim (p \vee q)$ είναι αληθής, ακριβώς όπως μας το ζητάει η εκφώνηση.

Το αντίστροφο διατυπώνεται ως εξής: αν p, q, r είναι τρεις λογικές προτάσεις ώστε η $\sim (p \vee q)$ να είναι αληθής, να δειχθεί ότι οι $p \Rightarrow (q \wedge r)$ και $q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$ είναι αληθείς. Από τον ίδιο πίνακα διαπιστώνουμε ότι η $\sim (p \vee q)$ είναι αληθής στις γραμμές $7, 8$, στις οποίες γραμμές οι $p \Rightarrow (q \wedge r)$ και $q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$ είναι επίσης αληθείς. Άρα το αντίστροφο ισχύει.

7. Ο Αλέξανδρος η Άννα και ο Αντώνης, ρωτήθηκαν αν είναι φοιτητές. Η απάντηση τους ήταν η εξής:

(i) "αν η Άννα είναι φοιτήτρια, τότε δεν είναι φοιτητής ο Αντώνης"
(ii) "δεν είναι σωστό ότι αν ο Αλέξανδρος είναι φοιτητής τότε δεν είναι φοιτήτρια η Άννα".

Με δεδομένο ότι η απάντηση τους είναι αληθής, να βρείτε ποιοι είναι φοιτητές και ποιοι όχι.
Λύση.
Διευκρινίζουμε ότι αυτό που μας ζητάει η εκφώνηση είναι να θεωρήσουμε ως αληθείς και τις δυο προτάσεις που αναφέρονται σε αυτήν και να απαντήσουμε για καθένα από τα τρία παιδιά, ποιος είναι φοιτητής και ποιος όχι. Πρέπει αρχικά να γράψουμε με μαθηματικό τρόπο την εκφώνηση. Συμβολίζουμε με

- p την πρόταση "Ο Αλέξανδρος είναι φοιτητής".
- q την πρόταση "Η Άννα είναι φοιτήτρια".
- r την πρόταση "Ο Αντώνης είναι φοιτητής".

Με αυτούς τους συμβολισμούς μπορούμε να ξαναγράψουμε τις προτάσεις που αναφέρονται στην εκφώνηση ως εξής

(i) $q \Rightarrow \sim r$.
(ii) $\sim (p \Rightarrow (\sim q))$.

Αυτή η άσκηση είναι της ίδιας λογικής με την Άσκηση 6. Αρχικά κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας. Ο πίνακας αυτός πρέπει να περιέχει όλες τις προτάσεις που εμφανίζονται στην εκφώνηση, δηλαδή τις

- $q \Rightarrow \sim r$
- $\sim (p \Rightarrow (\sim q))$

Τις χτίζουμε λοιπόν.

p	q	r	$\sim r$	$q \Rightarrow (\sim r)$	$\sim q$	$p \Rightarrow (\sim q)$	$\sim (p \Rightarrow (\sim q))$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ

Η υπόθεση μας λέει ότι οι $q \Rightarrow\sim r$ και $\sim (p \Rightarrow (\sim q))$ είναι αληθείς. Παρατηρούμε ότι η $q \Rightarrow\sim r$ είναι αληθής στις γραμμές $2, 3, 4, 6, 7, 8$ ενώ η $\sim (p \Rightarrow (\sim q))$ είναι αληθής στις γραμμές $1, 2$. Η υπόθεση μας λέει ότι αυτές οι δυο είναι ταυτόχρονα αληθείς, άρα αναγκαστικά περιοριζόμαστε στη γραμμή 2. Στη γραμμή 2 έχουμε ότι ο Αλέξανδρος είναι φοιτητής, η Άννα είναι φοιτήτρια και ο Αντώνης **δεν** είναι φοιτητής.

8. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σχήματα αντιστοιχούν σε λογικές αποδείξεις.

•

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \sim r \\ \hline \sim p \end{array}$$

Λύση.
Το σχήμα αυτό είναι ισοδύναμο με την πρόταση

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (\sim r)] \Rightarrow (\sim p) \ .$$

Πρέπει δηλαδή να δείξουμε ότι αυτή η πρόταση είναι ταυτολογία. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$\sim r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (\sim r)$	$\sim p$	Συνολική πρόταση
Α	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α

Στην τελευταία στήλη έχουμε παντού "Α", συνεπώς η πρόταση είναι ταυτολογία, άρα το σχήμα είναι απόδειξη.

•

$$\begin{array}{c} (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r) \\ p \vee q \\ \hline q \wedge r \end{array}$$

Λύση.
Το σχήμα αυτό είναι ισοδύναμο με την πρόταση

$$([(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)] \wedge (p \vee q)) \Rightarrow (q \wedge r) \ .$$

Πρέπει δηλαδή να δείξουμε ότι αυτή η πρόταση είναι ταυτολογία. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$	$p \vee q$	$[(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)] \wedge (p \vee q)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ

$q \wedge r$	Συνολική πρόταση
Α	Α
Ψ	Ψ
Ψ	Ψ
Ψ	Ψ
Α	Α
Ψ	Ψ
Ψ	Α
Α	Α

Στην τελευταία στήλη υπάρχουν και “Ψ”, συνεπώς η πρόταση δεν είναι ταυτολογία, άρα το σχήμα δεν είναι απόδειξη.